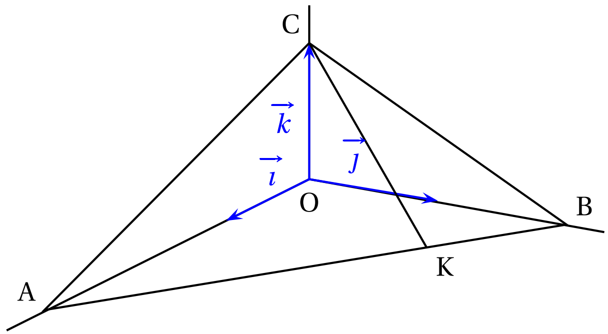
EXERCICE 4 **5 points**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère les points

$$\text{A}\left(2\sqrt{3} ; 0 ; 0\right), \quad \text{B}(0 ; 2 ; 0), \quad \text{C}(0 ; 0 ; 1) \quad \text{et} \quad \text{K}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{3}{2} ; 0\right).$$



1. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (CK) est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \\ y & = & \dfrac{3}{2}t \\ z & = & 1-t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

2. Soit M(t) un point de la droite (CK) paramétrée par un réel t.
Établir que $\text{OM}(t) = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}$.

3. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \text{OM}(t)$.
   a. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. En déduire la valeur de t pour laquelle f atteint son minimum.
4. En déduire que le point $\text{H}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{8}\ ;\ \dfrac{3}{8}\ ;\ \dfrac{3}{4}\right)$ est le projeté orthogonal du point O sur la droite (CK).
5. Démontrer, à l'aide de l'outil produit scalaire, que le point H est l'orthocentre (intersection des hauteurs d'un triangle) du triangle ABC.
6. **a.** Démontrer que la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC).
   b. En déduire une équation du plan (ABC).
7. Calculer, en unité d'aire, l'aire du triangle ABC.